

---

Cognome e nome ..... Firma .....

Corso di Laurea:   ◇ MECLT;   ◇ AUTLT;   ◇ MATLT.

---

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
  2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
  3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
  4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
  5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
  6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
  7. TEMPO a disposizione: 150 min.
- 

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti.

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 0,5]:**

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 1,5]:**

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

Calcolare la funzione derivata seconda di  $f$  e studiare la concavità e la convessità di  $f$ , calcolando gli eventuali punti di flesso per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

---

2. Determinare in forma algebrica/cartesiana le soluzioni della seguente equazione in campo complesso

$$z^4 - i|1 + i\sqrt{3}|z = 0$$

**Risposta [punti 3]:**

---

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\arctan \frac{7}{n} + n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(1 - \cos \frac{7}{n})}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

4. Determinare al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(\beta-1)n^2}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

5. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ; sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ (x-1)^\alpha \sin \sqrt[3]{x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si discuta al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  la continuità e la derivabilità di  $f$ .

**Risposta [punti 4]:**

---

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \cosh \frac{7}{x} (\sinh \frac{7}{x} - \sin \frac{7}{x})}{e^{\frac{7}{x}} - 1 - \log(1 + \frac{7}{x})}.$$

**Risposta [punti 4]:**

---

7. Calcolare la primitiva  $\mathcal{F}$  di  $f(x) = \frac{e^{3x} - 2e^x}{1 + e^{2x}}$  tale che  $\mathcal{F}(0) = 1$ .

**Risposta [3 punti]:**

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x^3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**Risposta [3 punti]:**

---

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti.

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 0,5]:**

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 1,5]:**

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

Calcolare la funzione derivata seconda di  $f$  e studiare la concavità e la convessità di  $f$ , calcolando gli eventuali punti di flesso per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

- 
2. Determinare in forma algebrica/cartesiana le soluzioni della seguente equazione in campo complesso

$$z^4 - i|1 + i\sqrt{3}|z = 0$$

**Risposta [punti 3]:**

- 
3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\arctan \frac{7}{n} + n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(1 - \cos \frac{7}{n})}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

4. Determinare al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(\beta-1)n^2}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

5. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ; sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ (x-1)^\alpha \sin \sqrt[3]{x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si discuta al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  la continuità e la derivabilità di  $f$ .

**Risposta [punti 4]:**

---

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \cosh \frac{7}{x} (\sinh \frac{7}{x} - \sin \frac{7}{x})}{e^{\frac{7}{x}} - 1 - \log(1 + \frac{7}{x})}.$$

**Risposta [punti 4]:**

---

7. Calcolare la primitiva  $\mathcal{F}$  di  $f(x) = \frac{e^{3x} - 2e^x}{1 + e^{2x}}$  tale che  $\mathcal{F}(0) = 1$ .

**Risposta [3 punti]:**

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x^3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**Risposta [3 punti]:**

---