Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma..

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{y^2}-1+2\sin(x^2y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2+1}$ e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x^2+y^2 \leq 3\,,\ 0 \leq y \leq x\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da $\vec{F}(x,y) = [\alpha\, e^y(2\cos x + 2\sin y) - 2xe^y \sin x]\,\vec{i} + [xe^y(2\cos x + 2\sin y) + \beta\, xe^y \cos y]\,\vec{j}$. Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{F}$ sia conservativo. Per tali valori di α e β si calcoli l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $A = (0,0)$ e $B = (\pi,\pi)$, percorso da A verso B.

....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le z \le 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = x\, e^{n(x^2-4)} + \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \in [0,+\infty) \quad n \in \mathbb{Z}^+ .$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 + \arctan\left(\frac{x}{n^{\beta-1}}\right)\right), \qquad x \in [0,+\infty)\,.$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale in $[0,+\infty[$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \le 0$, $f(x) = 6\cos x$ se $0 < x \le \pi$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\, \dfrac{y^2(y-7)}{y^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{e^{y^2}-1+2\sin(x^2 y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2+1}$ e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x^2+y^2 \leq 3\,,\ 0 \leq y \leq x\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da $\vec{F}(x,y) = [\alpha\, e^y(2\cos x + 2\sin y) - 2xe^y \sin x]\,\vec{i} + [xe^y(2\cos x + 2\sin y) + \beta\, xe^y \cos y]\,\vec{j}$. Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{F}$ sia conservativo. Per tali valori di α e β si calcoli l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $A = (0,0)$ e $B = (\pi,\pi)$, percorso da A verso B.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = x\, e^{n(x^2-4)} + \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \in [0,+\infty) \quad n \in \mathbb{Z}^+ .$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 + \arctan\left(\frac{x}{n^{\beta-1}}\right)\right), \qquad x \in [0, +\infty).$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale in $[0, +\infty[$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 6\cos x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\,\dfrac{y^2(y-7)}{y^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
