Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), numero di matricola e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 3 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
6. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 90 min.

---

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x^n}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in $I \cap [0, +\infty[$ ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta :

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + 1}{(n+1)2^n} x^n,$$

si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$; nei casi in cui è finito si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Si calcoli la funzione somma g nel caso $\alpha = 1$.

....

Risposta :

---

3. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} e^{-n^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale in $\mathbb{R}$.

....

Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2x$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 0$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n, $n \in \mathbb{N}$, b_n, $n \in \mathbb{Z}^+$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta :

---

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da
$$f_n(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x^n}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in $I \cap [0, +\infty[$ ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta :

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Data la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + 1}{(n+1)2^n} x^n,$$
si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$; nei casi in cui è finito si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Si calcoli la funzione somma g nel caso $\alpha = 1$.

. . . .

Risposta :

3. Si consideri la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} e^{-n^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Si discuta la convergenza puntuale e totale in $\mathbb{R}$.

. . . .

Risposta :

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2x$ se $-\pi < x \le 0$, $f(x) = 0$ se $0 < x \le \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n, $n \in \mathbb{N}$, b_n, $n \in \mathbb{Z}^+$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta :

5. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta :