Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x,y) = \alpha x^2 + 4xy + y^2 \,.$$

Determinare e classificare i punti di stazionarietà di g al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i}_1 - x\,\vec{i}_2 \,;$$

calcolare $I = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$ essendo Γ la curva di rappresentazione parametrica $\overrightarrow{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i}_1 + \sin^3 t\,\vec{i}_2$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare
$$\iint_T \left(2e^y \sin x + x^2\right)\, dxdy\,,$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \le y \le 1 - |x|,\ -1 \le x \le 1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{2}{x}\right)^n\right)\,, \qquad x \in]0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^2+1)}}\right) \frac{1}{n^2} \frac{n^{2-\beta}}{\exp\frac{1}{n^3} - 1} \qquad x \in [0, +\infty[.$$
Si discuta la convergenza puntuale e totale in $[0, +\infty[$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{G} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale
$$\vec{G}(x,y) = \left[e^{3\arctan x}\left(1 + \frac{\alpha x}{1+x^2}\right)\arctan y - 2x\right]\vec{i}_1 + \frac{xe^{3\arctan x}}{1+y^2}\,\vec{i}_2\,.$$

Determinare per quale valore di α il campo $\vec{G}$ è conservativo e calcolare, per tale valore, l'integrale $I = \int_\Gamma \vec{G}$ dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2$ di estremi $A = (0,0)$ e $B = (1,1)$, percorso da A verso B.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = t^2(2 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x,y) = \alpha x^2 + 4xy + y^2 \,.$$

Determinare e classificare i punti di stazionarietà di g al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i}_1 - x\,\vec{i}_2\,;$$

calcolare $I = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$ essendo Γ la curva di rappresentazione parametrica $\overrightarrow{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i}_1 + \sin^3 t\,\vec{i}_2$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare

$$\iint_T \left(2e^y \sin x + x^2\right)\,dxdy\,,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|,\ -1 \leq x \leq 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{2}{x}\right)^n\right)\,, \quad x \in]0,+\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^2+1)}}\right) \frac{1}{n^2} \frac{n^{2-\beta}}{\exp\frac{1}{n^3} - 1} \qquad x \in [0, +\infty[.$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale in $[0, +\infty[$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{G} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$\vec{G}(x,y) = \left[e^{3\arctan x}\left(1 + \frac{\alpha x}{1+x^2}\right)\arctan y - 2x\right] \vec{i}_1 + \frac{xe^{3\arctan x}}{1+y^2} \vec{i}_2 \,.$$

Determinare per quale valore di α il campo $\vec{G}$ è conservativo e calcolare, per tale valore, l'integrale $I = \int_\Gamma \vec{G}$ dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2$ di estremi $A = (0,0)$ e $B = (1,1)$, percorso da A verso B.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(2 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
