Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin^2(xy) - x^2y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = y^2 \log\left(x-2\right) - 7x + x^2$, definita nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 2\}$. Determinare e classificare i punti di stazionarietà di g in A.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare la lunghezza L della curva Γ di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - 2t\right)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{t^3}{3} + 2t\right)\vec{j} + \sqrt{2}\,t^2\,\vec{k}, \quad t \in [0, \sqrt{3}]\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie

$$\frac{1}{13}\iint_S y\,dS$$

dove S è la superficie data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x + y^2,\, (x,y) \in T\}$ con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ .$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{x}+7}{n+2} \arctan\left(\frac{x}{(\log(n))^{\beta-2}}\right), \qquad x \in [0,+\infty) .$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale in $[0,+\infty[$ al variare di $\beta > 2$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove $\vec{F}(x,y) = (2xye^x)\,\vec{i} + (2xe^x - 2e^x + \cos y)\,\vec{j}$ e Γ è l'arco di semicirconferenza $\{x^2 + (y-2)^2 = 4\ , y \ge 2\}$, percorso in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\ \dfrac{y \arctan y}{y^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin^2(xy) - x^2y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = y^2 \log\big(x-2\big) - 7x + x^2$, definita nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 2\}$. Determinare e classificare i punti di stazionarietà di g in A.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare la lunghezza L della curva Γ di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - 2t\right)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{t^3}{3} + 2t\right)\vec{j} + \sqrt{2}\,t^2\,\vec{k}, \quad t \in [0, \sqrt{3}]\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie

$$\frac{1}{13}\iint_S y\,dS$$

dove S è la superficie data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x + y^2,\, (x,y) \in T\}$ con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 3,\, 0 \leq y \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{x}+7}{n+2} \arctan\left(\frac{x}{(\log(n))^{\beta-2}}\right), \qquad x \in [0,+\infty)\,.$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale in $[0,+\infty[$ al variare di $\beta > 2$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove $\vec{F}(x,y) = (2xye^x)\,\vec{i} + (2xe^x - 2e^x + \cos y)\,\vec{j}$ e Γ è l'arco di semicirconferenza $\{x^2 + (y-2)^2 = 4\ , y \geq 2\}$, percorso in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\ \dfrac{y \arctan y}{y^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:
