ANALISI MATEMATICA II | 9 GENNAIO 2019 | FOGLIO A

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x^2y^4}-1}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 2 \leq x \leq 4 - y^2\}$. Data $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{2} + y\right)$, determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{4+3x^2}\,ds$ dove Γ è l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 16$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + (y+2)^2 \leq 1, \, x^2 + y^2 \leq z \leq -3 - 4y\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log n + 2}{1 + \log n^4 + nx^2}, \quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} ((2n+1)!)^{\alpha-1}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza R, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 1$, calcolare la somma della serie.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1 + y^2) + \arctan(\log(1 + y^2)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x^2y^4}-1}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 2 \leq x \leq 4 - y^2\}$. Data $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{2} + y\right)$, determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{4+3x^2}ds$ dove Γ è l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 16$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + (y+2)^2 \leq 1, \, x^2 + y^2 \leq z \leq -3 - 4y\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log n + 2}{1 + \log n^4 + nx^2}\,, \quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}((2n+1)!)^{\alpha-1}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza R, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 1$, calcolare la somma della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1+y^2) + \arctan(\log(1+y^2)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
