Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), numero di matricola e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 3 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
6. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 90 min.

---

1. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{\log n + 2}{1 + \log n^4 + nx^2}\,, \quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$
Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   Risposta :

---

2. Si consideri la seguente serie di potenze.
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} ((2n+1)!)^{\alpha-1}\,.$$
Si calcoli il raggio di convergenza R, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 1$, calcolare la somma della serie.

   ....

   Risposta :

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + n^\beta x}}, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$
Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

   ....

   Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1 + y^2) + \arctan(\log(1 + y^2)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta :

---

1. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{\log n + 2}{1 + \log n^4 + nx^2}, \quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta :

---

2. Si consideri la seguente serie di potenze.
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} ((2n+1)!)^{\alpha-1}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza R, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 1$, calcolare la somma della serie.

. . . .

Risposta :

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + n^\beta x}}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

. . . .

Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \log(1 + y^2) + \arctan(\log(1 + y^2)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta :
