
Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy^2 - x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali (in particolare quelle parziali) e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = y + \dfrac{x}{3}$ e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-\frac{1}{2})^2 \leq y \leq \frac{1}{4} - \frac{x}{3}\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2)ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 2(\cos t + t\sin t)\,\vec{i} + 2(\sin t - t\cos t)\,\vec{j} \quad t \in [0, 2\pi]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare

$$\iint_T \frac{1/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dxdy\,,$$

dove T è il trapezio di vertici $A=(2,0)$, $B=(2,2)$, $C=(3,3)$, $D=(3,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x)=\log\left(\frac{n+2}{n+1}+(e-1)(2x)^n\right),\qquad x\in[0,+\infty[,\qquad n\in\mathbb{Z}^+\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n(n!)^{\alpha-1}},\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza R, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$; nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha=1$, calcolare la somma della serie.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x)=0$ se $|x|\geq\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\pi\cos x+1$ se $|x|<\frac{\pi}{2}$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=e^t\left(1-e^{49-y^2}\right)\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy^2 - x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali (in particolare quelle parziali) e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

   ....

   Risposta [5 punti]:

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = y + \dfrac{x}{3}$ e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-\frac{1}{2})^2 \leq y \leq \frac{1}{4} - \frac{x}{3}\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

   ....

   Risposta [4 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2)ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 2(\cos t + t\sin t)\,\vec{i} + 2(\sin t - t\cos t)\,\vec{j} \quad t \in [0, 2\pi]$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Calcolare

$$\iint_T \frac{1/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dxdy\,,$$

   dove T è il trapezio di vertici $A = (2,0)$, $B = (2,2)$, $C = (3,3)$, $D = (3,0)$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(\frac{n+2}{n+1} + (e-1)(2x)^n\right), \quad x \in [0, +\infty[, \quad n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi.

   Risposta [5 punti]:

6. Si consideri la seguente serie di potenze.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n(n!)^{\alpha-1}}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza R, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 1$, calcolare la somma della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \pi \cos x + 1$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$ in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t \left(1 - e^{49-y^2}\right) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
