ANALISI MATEMATICA II- 9 SETTEMBRE 2019 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto ad α nell'esercizio 6.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$=$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=v_1v_2(2v_2-v_1)$, dove $\vec{v}=(v_1,v_2)$. f non è differenziabile in $(0,0)$ (si può osservare, ad esempio, che $\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}\neq\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$).

2. $m=\frac{5}{36}$ assunto in $(\frac{1}{3},\frac{1}{36})$ e $M=\frac{1}{4}$ assunto sul segmento appartenente alla retta $y-\frac{1}{4}-\frac{x}{3}$ delimitato dalla parabola $y=(x-\frac{1}{2})^2$.

3. $2(2\pi^2+4\pi^4)$

4. $\frac{\pi}{4}\log\frac{3}{2}$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I=[0,1/2]$ a f con $f(x)=0$ se $0\leq x<1/2$, $f((1/2)=1$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,b]$ (con $0<b<1/2$).

6. $R=0$ se $\alpha<1$, $R=\infty$ se $\alpha>1$; $R=1/2$, se $\alpha=1$, converge in $x=1/2$ (mediante il criterio di Leibniz) e diverge in $x=-1/2$ (quindi convergenza uniforme in $[-M,1/2]$ con $0<M<1/2$) per il teorema di Abel) e la somma è $\log(1+2x)-2x$

7. La funzione è pari. $a_0=3$, $a_1=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}$, $b_1=0$, $a_2=\frac{2}{3}$, $b_2=0$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(2\pi)=\pi+1$, $S(3\pi)=0$, $S(\frac{5}{2}\pi)=1/2$.

8. $f(t,y)=e^t\left(1-e^{49-y^2}\right)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u=\pm7$ soluzioni stazionarie; se $|y_0|>7$ le soluzioni sono crescenti, se $-7<y_0<7$ le soluzioni sono decrescenti; se $y_0>-7$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=7$; se $y_0<7$ $\lim_{t\to+\infty}u(t)=-7$; se $y_0>7$, $\lim_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$; se $y_0<-7$, $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$=$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=v_1v_2(3v_2-v_1)$, dove $\vec{v}=(v_1,v_2)$. f non è differenziabile in $(0,0)$ (si può osservare, ad esempio, che $\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}\neq\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$).

2. $m=\frac{5}{36}$ assunto in $(\frac{1}{3},\frac{1}{36})$ e $M=\frac{1}{4}$ assunto sul segmento appartenente alla retta $y-\frac{1}{4}-\frac{x}{3}$ delimitato dalla parabola $y=(x-\frac{1}{2})^2$.

3. $3(2\pi^2+4\pi^4)$

4. $\frac{\pi}{4}\log\frac{4}{3}$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I=[0,1/3]$ a f con $f(x)=0$ se $0\leq x<1/3$, $f((1/3)=1$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,b]$ (con $0<b<1/3$).

6. $R=0$ se $\alpha<2$, $R=\infty$ se $\alpha>2$; $R=1/3$, se $\alpha=2$, converge in $x=1/3$ (mediante il criterio di Leibniz) e diverge in $x=-1/3$ (quindi convergenza uniforme in $[-M,1/3]$ con $0<M<1/3$) per il teorema di Abel) e la somma è $\log(1+3x)-3x$

7. La funzione è pari. $a_0=3$, $a_1=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}$, $b_1=0$, $a_2=\frac{2}{3}$, $b_2=0$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(4\pi)=\pi+1$, $S(5\pi)=0$, $S(\frac{5}{2}\pi)=1/2$.

8. $f(t,y) = e^t\left(1-e^{36-y^2}\right)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 6$ soluzioni stazionarie; se $|y_0| > 6$ le soluzioni sono crescenti, se $-6 < y_0 < 6$ le soluzioni sono decrescenti; se $y_0 > -6$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 6$; se $y_0 < 6$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -6$; se $y_0 > 6$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$; se $y_0 < -6$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$=$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = v_1 v_2(4v_2 - v_1)$, dove $\vec{v} = (v_1, v_2)$. f non è differenziabile in $(0,0)$ (si può osservare, ad esempio, che $\nabla f(0,0)\cdot\vec{v} \neq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$).

2. $m = \frac{5}{36}$ assunto in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{36})$ e $M = \frac{1}{4}$ assunto sul segmento appartenente alla retta $y - \frac{1}{4} - \frac{x}{3}$ delimitato dalla parabola $y = (x-\frac{1}{2})^2$.

3. $4(2\pi^2 + 4\pi^4)$

4. $\frac{\pi}{4}\log\frac{5}{4}$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0, 1/4]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1/4$, $f((1/4) = 1$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0, b]$ (con $0 < b < 1/4$).

6. $R = 0$ se $\alpha < 3$, $R = \infty$ se $\alpha > 3$; $R = 1/4$, se $\alpha = 3$, converge in $x = 1/4$ (mediante il criterio di Leibniz) e diverge in $x = -1/4$ (quindi convergenza uniforme in $[-M, 1/4]$ con $0 < M < 1/4$) per il teorema di Abel) e la somma è $\log(1+4x) - 4x$

7. La funzione è pari. $a_0 = 3$, $a_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$, $b_1 = 0$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $b_2 = 0$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(6\pi) = \pi + 1$, $S(7\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 1/2$.

8. $f(t,y) = e^t\left(1-e^{25-y^2}\right)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 5$ soluzioni stazionarie; se $|y_0| > 5$ le soluzioni sono crescenti, se $-5 < y_0 < 5$ le soluzioni sono decrescenti; se $y_0 > -5$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 5$; se $y_0 < 5$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -5$; se $y_0 > 5$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$; se $y_0 < -5$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$.
