

Cognome e nome Firma Matricola

Corso di Laurea: ◇ INFL ◇ PPING

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e tutti i fogli di protocollo.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

1. Calcolare l'integrale $\int_1^{e^7} \frac{\log(1 + \log x)}{x} dx$.

.....

Risposta [3 punti]:

2. Dato il problema di Cauchy

$$y'' + y = 2(7x + 1)e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{xe^x}.$$

.....

Risposta [4 punti]:

3. Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e il vettore $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Stabilire se esistono (ed in caso affermativo calcolarle) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$.

.....

Risposta [4 punti]:

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = (y - x^2)^2(y - 7x).$$

Verificare se i punti dell'insieme $C = \{(\alpha, \alpha^2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ sono stazionari per f ed in tal caso classificarli.

.....

Risposta [Verifica stazionarietà 1 punto, classificazione 3 punti]:

5. Si considerino la funzione

$$g(x, y) = (x - y + 1) \log(x - y + 1)$$

e il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x - y \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

.....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

6. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 2 \cosh t \vec{i}_1 + 2 \sinh t \vec{i}_2 + 2t \vec{i}_3$, con $0 \leq t \leq 1$. Calcolare la lunghezza di Γ .

.....

Risposta [3 punti]:

7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove \vec{F} è il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x, y) = \left[2x \log(y^2 + 2) + \frac{2xy^2}{x^2 + 2} \right] \vec{i}_1 + \left[2y \log(x^2 + 2) + \frac{2yx^2}{y^2 + 2} \right] \vec{i}_2$$

e Γ è la poligonale costituita dai segmenti AB e BC con $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (2, 0)$ (percorsa da A a C).

.....

Risposta [4 punti]:

8. Calcolare $\iint_T [\sin y + 3x] dx dy$, dove $T = (Q \setminus C) \cap \{x > 0\}$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ e C è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

.....

Risposta [4 punti]:

1. Calcolare l'integrale $\int_1^{e^7} \frac{\log(1 + \log x)}{x} dx$.
-

Risposta [3 punti]:

2. Dato il problema di Cauchy

$$y'' + y = 2(7x + 1)e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{xe^x}.$$

.....

Risposta [4 punti]:

3. Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e il vettore $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Stabilire se esistono (ed in caso affermativo calcolarle) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$.

.....

Risposta [4 punti]:

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = (y - x^2)^2(y - 7x).$$

Verificare se i punti dell'insieme $C = \{(\alpha, \alpha^2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ sono stazionari per f ed in tal caso classificarli.

.....

Risposta [Verifica stazionarietà 1 punto, classificazione 3 punti]:

5. Si considerino la funzione

$$g(x, y) = (x - y + 1) \log(x - y + 1)$$

e il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x - y \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

.....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

6. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 2 \cosh t \vec{i}_1 + 2 \sinh t \vec{i}_2 + 2t \vec{i}_3$, con $0 \leq t \leq 1$. Calcolare la lunghezza di Γ .

.....

Risposta [3 punti]:

7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove \vec{F} è il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x, y) = \left[2x \log(y^2 + 2) + \frac{2xy^2}{x^2 + 2} \right] \vec{i}_1 + \left[2y \log(x^2 + 2) + \frac{2yx^2}{y^2 + 2} \right] \vec{i}_2$$

e Γ è la poligonale costituita dai segmenti AB e BC con $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (2, 0)$ (percorsa da A a C).

.....

Risposta [4 punti]:

8. Calcolare $\iint_T [\sin y + 3x] dx dy$, dove $T = (Q \setminus C) \cap \{x > 0\}$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ e C è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

.....

Risposta [4 punti]:
