Complementi di Analisi Matematica

Prova scritta del 10 Aprile 2006

1. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_T 6x(1-z)\,dxdydz$$
dove T è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

2. Sia S la porzione di superficie laterale del cilindro definita da $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2=4, 0 \leq z \leq x+y, y \geq 0\}$. Calcolare l'area di S.

3. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$g(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{per } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme della successione
$$f_n(x) = n^\alpha g(x-n).$$

4. Sia data la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}-1}{n+1}.$$
   (a) Dimostrare che converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che converge uniformemente su intervalli limitati di $\mathbb{R}$.
   (c) Dimostrare che la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = x-y \\ x(0)=0, y(0)=1. \end{cases}$$

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y-t)^2 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che esiste una ed una sola soluzione locale $u :]1-\delta, 1+\delta[\to \mathbb{R}$ del problema.
   (b) Dimostrare che $u(t) \geq 0$ per ogni $t \in I \cap [1,+\infty[$, dove I è l'intervallo massimale d'esistenza per u.
   (c) Dimostrare che $u(t) < t$ per ogni $t \in I \cap [1,+\infty[$. (*Suggerimento: notando che $u(t) < t$ per t vicino a 1, supporre l'esistenza di $t_0 > 1$ tale che $u(t_0) = t_0$...)*
   (d) Dimostrare che $[1-\delta, +\infty[\subseteq I$, cioè che u è definita almeno sull'intervallo $[1-\delta, +\infty[$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti