COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 10 LUGLIO 2008

1) Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso la superficie S definita da $\overrightarrow{r}(u,v) = u\cos 2v\,\overrightarrow{i} + u\sin 2v\,\overrightarrow{j} + u^2\overrightarrow{k}$, $0 \le u \le 1/3$, $0 \le v \le 2\pi$, orientata in senso positivo.

2) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T 3yz\,dxdydz$$

dove $T := \{(x,y,z) \in [-1,1]^3 : z \ge |x|, y \ge 0\}$.

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$:

$$f_n(x) = n^\alpha x^2 e^x \,;$$

si studi, al variare di α la convergenza puntuale e la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

4) Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2n+1)x^{2n+1}}.$$

Si calcoli la sua funzione somma *(suggerimento: si ponga, ad esempio, $t = \sqrt{3}/x$).*

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - ty' = e^{\frac{t^2}{2}}\,, \\ y(0) = 2 \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-y^2} + t^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a. Dimostrare che ammette un'unica soluzione u definita su tutto $\mathbb{R}$.
b. u è dispari?
c. Calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(t)$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.