Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Studi: ♢ AUTL ♢ MATL ♢ MECL ♢ AUTLS ♢ MATLS ♢ MECLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il flusso del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso la superficie S, dove $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\,, 0 \le z \le 2\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2\,, z = 2\}$ e
$$\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + 12x^2y\,\vec{j} + yz\,\vec{k}.$$
. . . .
Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S z(1 + 2\cos^2(y - x))^{-1/2}\, dS$ dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin(y - x)\,, 0 \le x \le \pi\,, x \le y \le x + 7\}$.
. . . .
Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $[0, +\infty[$:
$$f_n(x) = \frac{7x^n}{7 + x^n}.$$
Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si discuta la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $[0, +\infty[$ e/o in suoi sottoinsiemi.
. . . .
Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,,$$

dove $\{f_n\}$ è la la successione di funzioni dell'esercizio precedente. Si studi la convergenza puntuale e la convergenza totale.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = e^{-2|x|}$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$. Si calcoli $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' - \dfrac{y'}{t} = \dfrac{8t}{t^2+1}\,,\ y(1) = 2(\pi - 2)\,,\ y'(1) = 2\pi\,.$ (Suggerimento: porre $z(t) = y'(t)\ldots$).

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(e^y - 2)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

   Si discuta, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se l'intervallo massimale di esistenza può essere tutto $\mathbb{R}$.

   Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, i limiti agli estremi dell'intervallo massimale.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare il flusso del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso la superficie S, dove $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 , 0 \le z \le 2\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2 , z = 2\}$ e

$$\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + 12x^2y\,\vec{j} + yz\,\vec{k}.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S z(1 + 2\cos^2(y-x))^{-1/2}\, dS$ dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin(y-x) , 0 \le x \le \pi , x \le y \le x + 7\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $[0, +\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{7x^n}{7 + x^n}.$$

Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si discuta la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $[0, +\infty[$ e/o in suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) ,$$

dove $\{f_n\}$ è la la successione di funzioni dell'esercizio precedente. Si studi la convergenza puntuale e la convergenza totale.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = e^{-2|x|}$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$. Si calcoli $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' - \dfrac{y'}{t} = \dfrac{8t}{t^2+1}$, $y(1) = 2(\pi - 2)$, $y'(1) = 2\pi$. (Suggerimento: porre $z(t) = y'(t) \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(e^y - 2)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

   Si discuta, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se l'intervallo massimale di esistenza può essere tutto $\mathbb{R}$.

   Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, i limiti agli estremi dell'intervallo massimale.

. . . .

Risposta [4 punti]:
