COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DELL'11 DICEMBRE 2006

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + z^3\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 2.

2) Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_S 16xy\,dS\,,$$

dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2,\ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le \sqrt{3}\}$.

3) Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{(\sin\frac{\pi}{2}x)^n + 2}{x^{2n}+1}\,;$$

si studi la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ ed uniforme almeno in $[1,+\infty[$.

4) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right)^n \frac{1}{n^\alpha}.$$

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - \sin t\, y' = \cos t\, e^{-\cos t}, \\ y(0) = e^{-1}, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

6) Si consideri la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = y - y^3 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza locale e globale.
2. Tracciare il grafico di alcune soluzioni nel piano (t,y).
3. Dimostrare che se u è soluzione del problema di Cauchy con $y_0 = \frac{1}{2}$, allora è definita su tutto $\mathbb{R}$.
4. Sia u la soluzione massimale tale che $y_0 > 1$. Si determini se è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.