Complementi di Analisi Matematica

Prova scritta dell'11 Gennaio 2006

1. Calcolare
$$\iiint_E \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dxdydz,$$
dove E è la zona del semispazio $z \geq 0$ determinata dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2=1$ e della semisfera $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$.

2. Calcolare l'integrale superficiale
$$\iint_S xye^{2y-z}\,dS$$
dove S è il rettangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,1)$.

3. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = x^2\left(1+\frac{e^x}{n}\right)$$
con $n \geq 1$.
   (a) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale ed il limite puntuale $f : I \to \mathbb{R}$ di $\{f_n\}_{n\geq 1}$.
   (b) Studiare la convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n\geq 1}$, dimostrando in particolare che $f_n \to f$ uniformemente su intervalli limitati, ma non in generale su intervalli illimitati.
   (c) Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n'\}_{n\geq 1}$ sull'intervallo $]-\infty, 1]$.

4. Nella teoria quantistica, un sistema di oscillatori, ciascuno di frequenza fondamentale ν, interagenti alla temperatura T, ha un'energia media $\overline{E}$ data da
$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} nh\nu e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}}$$
dove $x = \frac{h\nu}{KT}$ (h e K costanti di Planck e di Boltzmann rispettivamente). Dimostrare che le serie
$$h\nu\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$$
convergono puntualmente per $x > 0$, e calcolare la loro somma. Ricordando che $x = \frac{h\nu}{KT}$, osservare che alle alte temperature $\overline{E}(T)$ è "approssimabile" con KT, mentre alle basse temperature con $h\nu e^{-\frac{h\nu}{KT}}$.

5. Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' = e^y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2e} \end{cases}$$

6. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+t^2}{1+2t^2} + e^y \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Dimostrare che esiste una ed una sola soluzione locale u del problema per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Dallo studio della derivata prima, ricavare che il dominio massimale di u contiene un intervallo della forma $]-\infty, \delta[$ con δ sufficientemente piccolo.

(c) Calcolare $\lim_{t \to -\infty} u(t)$.

(d) Verificare che il dominio massimale non è tutto $\mathbb{R}$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti