Complementi di Analisi Matematica

Prova scritta del 11 Settembre 2006

1. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_P xy^2\,dxdydz$$
dove P è il parallelepipedo avente come facce opposte i quadrati determinati dai vertici
$$A = (0,0,0) \quad B = (1,0,0) \quad C = (1,1,0) \quad D = (0,1,0)$$
e
$$E = (1,0,1) \quad F = (2,0,1) \quad G = (2,1,1) \quad H = (1,1,1).$$

2. Sia P il parallelepipedo dell'esercizio precedente, e sia
$$\vec{F}(x,y,z) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}.$$
Calcolare il flusso di $\vec{F}$ attraverso il bordo di P orientato rispetto alla normale esterna.

3. Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f_n(x) = \sin^n\left(\frac{\pi}{2}x^2\right).$$
   (a) Calcolare il limite puntuale $f : I \to \mathbb{R}$ di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Discutere la convergenza uniforme sugli intervalli $[0,1/2]$ e $[0,1]$.
   (c) Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2} f_n(x)\,dx.$$

4. Studiare l'insieme di convergenza e determinare la somma della serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n4^n}.$$

5. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} u'' + u' = e^x \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{x\to+\infty} u(x)e^{-x}$.

6. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} u' = \frac{1}{(t+1)^2} + e^{-u^2} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che il problema ammette una ed una sola soluzione locale $y(t)$.
   (b) Determinare il dominio massimale di $y(t)$.
   (c) Determinare, al variare di $\alpha \geq 0$, il numero di soluzioni $u(t) = \alpha$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti