COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DELL' 11 SETTEMBRE 2007

1) Calcolare il volume del solido dato dalla regione di spazio sotto il piano $z = 3 - 2y$ e sopra il paraboloide $z = 4x^2 + y^2$.

2) Calcolare l'area della porzione di superficie di equazione $z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ che si proietta nel triangolo T determinato da $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 3$.

3) Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e si consideri la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in $(0, +\infty)$ da $f_n(x) = \frac{4x+n^\beta}{x+n}$. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme al variare di β.

4) Si consideri la funzione f periodica di periodo 2π, definita da

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad x \in [0, 2\pi).$$

Si mostri che la serie

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

è la sua serie di Fourier. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $(*)$ come serie trigonometrica; si ritrovino le conclusioni ottenute dai teoremi sulle caratteristiche di f, specificando, in particolare, il valore a cui converge nei multipli interi di π.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + e^{-\frac{y}{t}}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(consiglio: porre $z = \frac{y}{t}$ .....)

6) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\sqrt{y - 2} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistenza (locale e globale) ed unicità di soluzioni.
(b) Determinare in modo esplicito le soluzioni (nei casi in cui si ha esistenza).

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.