COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 12 LUGLIO 2007

1) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz\,,$$

dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,, z \geq 1\}$.

2) Calcolare l'area della superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ contenuta nel tetraedro delimitato da $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 2$.

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in $(0, +\infty)$ da $f_n(x) = n^{\alpha+1}x^2(e^{1/nx^2} - 1)$. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme al variare di α.

4) Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2+\cos^2 x}\right)^{n/2}(\sin x)^n$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e si calcoli la sua funzione somma.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{3}{2}\dfrac{e^{t^3}}{y}, \\ y(1) = \sqrt{e}. \end{cases}$$

(consiglio: porre $y(t) = \sqrt{z(t)}$....)

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari, strettamente crescente, di classe C^1, limitata e non identicamente nulla. Si consideri l'equazione autonoma

$$y' = f(y)$$

(a) Mostrare che le soluzioni massimali sono definite su $\mathbb{R}$.
(b) Mostrare che, se u è soluzione, anche $-u$ è soluzione.
(c) Sia u soluzione con $u(0) = y_0 > 0$; allora
  (1) u è strettamente crescente;
  (2) u è convessa;
  (3) calcolare i limiti $\lim_{t\to-\infty} u(t)$, $\lim_{t\to+\infty} u(t)$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.