Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C — 14 gennaio 2013

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T \frac{|y|e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio compresa fra i cilindri $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$ ed i piani $z=0$ e $z=1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S 3y^5\,dS$ dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{15}x+y^4\,,0\le x\le 3\,,\ 0\le y\le 1\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Sia $\alpha>0$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{n^\alpha}e^{-\frac{x^2}{n^{14}}},\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{\ln(n+1)} x^n \,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza e, nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si determini l'insieme di convergenza uniforme.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = -2x$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 0$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n con $n \in \mathbb{N}$ e b_n con $n \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = \frac{y}{t} + e^{-\frac{7y}{t}} \quad y(1) = 0$. (*suggerimento: porre* $y/t = z$)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-3y} - 1 \,, \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

   Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \frac{|y|e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dxdydz$ dove T è la parte di spazio compresa fra i cilindri $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$ ed i piani $z=0$ e $z=1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 3y^5\, dS$ dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{15}x + y^4\,, 0 \le x \le 3\,,\ \ 0 \le y \le 1\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Sia $\alpha > 0$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha} e^{-\dfrac{x^2}{n^{14}}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{\ln(n+1)} x^n\,.$$

   Si calcoli il raggio di convergenza e, nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si determini l'insieme di convergenza uniforme.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = -2x$ se $-\pi < x \le 0$, $f(x) = 0$ se $0 < x \le \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n con $n \in \mathbb{N}$ e b_n con $n \in \mathbb{Z}^+$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = \frac{y}{t} + e^{-\frac{7y}{t}} \quad y(1) = 0$. (*suggerimento: porre* $y/t = z$)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-3y} - 1\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:
