Complementi di Analisi Matematica

Prova scritta del 13 Luglio 2006

1. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_T xz\,dxdydz$$
dove $T := \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3 : z \geq |y|, x \geq 0\}$.

2. Calcolare l'integrale di superficie
$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\,d\sigma$$
dove $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, S è il triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ ed $\vec{n}$ è la normale tale che $\vec{n} \cdot \vec{i} > 0$.

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da
$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & |x| \geq \frac{1}{n} \\ n^\alpha x^2 & |x| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

4. Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e tale che
$$f(x) := \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$
Sia s la serie di Fourier associata ad f, e siano a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, i suoi coefficienti.
   (a) Dimostrare che $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calcolare i coefficienti a_0 e a_1.
   (c) Trovare il limite puntuale di s, e discuterne la convergenza uniforme sugli intervalli $[0, \pi]$ e $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
   (d) Calcolare $a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

5. Sia data l'equazione differenziale
$$t^2y'' - 2y = 0$$
con $t > 0$.
   (a) Trovare un polinomio di secondo grado che sia soluzione dell'equazione.
   (b) Detta $y_1(t)$ tale soluzione, determinare un'altra soluzione dell'equazione linearmente indipendente da $y_1(t)$.

6. Sia $n \in \mathbb{N}$, e consideri il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 2y + \frac{1}{n}\sin y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che esiste una ed una sola soluzione locale $u_n :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ del problema.
   (b) Dimostrare che il dominio massimale su cui è definita u_n è $\mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Dimostrare che u_n è crescente su $\mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Calcolare il limite puntuale di u_n per $n \to +\infty$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti