Cognome e nome ............... ............... Firma ............... Matricola ...............

Corso di Studi: ♢ AUTL ♢ MATL ♢ MECL ♢ AUTLS ♢ MATLS ♢ MECLS

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il flusso del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso il tetraedro delimitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 2$, dove

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 3x)\vec{i} - 2xy\,\vec{j} + z(3 - 2x)\,\vec{k}.$$

...............................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 18x^3\,dS$, dove $S$ è la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\,\vec{j} + u^3\,\vec{k}$, con $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 6$

...............................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

3. Sia $\beta \in \mathbb{R}$; si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita: $f_n(x) = n^{\beta-1}\left[e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right]$. Si determini il limite puntuale $f$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. In corrispondenza dei valori di $\beta$ per cui $f(x) \equiv 0$, si studi anche la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi (si osservi che $e^t - 1 - t \ge 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

...............................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \frac{\arctan[n + \log(1 + \frac{9x^2}{n})]}{(n + \sin x)^{\alpha - 7}} + \frac{n^2}{7^n} \right].$$

Si studi la convergenza totale in $\mathbb{R}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

5. Sapendo che la serie di Fourier di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $2\pi$, è data da $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$ è uguale a

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $t^2 y'' - ty' + y = \cos \log t, \quad y(1) = 7, y'(1) = -\frac{1}{2}$ (consiglio: porre $y(t) = z(x(t))$ con $x(t) = \log t \ldots$).

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t \arctan(y - 1)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la concavità delle soluzioni e si determinino eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui). Si calcoli $\lim_{t \to 0} \frac{u(t) - y_0}{\sin^2 t}$, dove $u$ è soluzione del problema di Cauchy.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

1. Calcolare il flusso del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso il tetraedro delimitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 2$, dove
$$\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 3x)\vec{i} - 2xy\,\vec{j} + z(3 - 2x)\,\vec{k}.$$
...........................................................................................
**Risposta [4 punti]:**

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 18x^3\, dS$, dove $S$ è la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\,\vec{j} + u^3\,\vec{k}$, con $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 6$
...........................................................................................
**Risposta [4 punti]:**

3. Sia $\beta \in \mathbb{R}$; si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita: $f_n(x) = n^{\beta-1}\left[e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right]$. Si determini il limite puntuale $f$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. In corrispondenza dei valori di $\beta$ per cui $f(x) \equiv 0$, si studi anche la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi (si osservi che $e^t - 1 - t \ge 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$).
...........................................................................................
**Risposta [4 punti]:**

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{\arctan[n + \log(1 + \frac{9x^2}{n})]}{(n + \sin x)^{\alpha-7}} + \frac{n^2}{7^n}\right].$$
Si studi la convergenza totale in $\mathbb{R}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
...........................................................................................
**Risposta [4 punti]:**

5. Sapendo che la serie di Fourier di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $2\pi$, è data da $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$ è uguale a
...........................................................................................
**Risposta [4 punti]:**

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $t^2y''-ty'+y = \cos\log t$, $\quad y(1) = 7$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$ (consiglio: porre $y(t) = z(x(t))$ con $x(t) = \log t \ldots$).

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\arctan(y-1)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la concavità delle soluzioni e si determinino eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui). Si calcoli $\lim_{t\to 0} \frac{u(t)-y_0}{\sin^2 t}$, dove $u$ è soluzione del problema di Cauchy.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---