Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C — 14 gennaio 2013

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_V 6z\,dxdydz$ dove V è il dominio definito da

   $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

2. Calcolare il flusso del ROTORE del campo

   $$\vec{F}(x, y, z) = (\frac{3}{2}y + z^2)\,\vec{i} + (x - z^2)\,\vec{j} + (z + \arctan(xe^y))\,\vec{k}$$

   attraverso la superficie S definita dalla porzione di superficie sferica $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ contenuta nel cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

   $$f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

4. Sia $\gamma \in [0, +\infty[$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^\gamma + 1} 3^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\gamma \in [0, +\infty[$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \sin x$, se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2x$, se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\dfrac{4 - y^2}{y}, \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia e le eventuali simmetrie delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = t\dfrac{4 - y^2}{y}$, $\quad y(0) = -\sqrt{3}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_V 6z\, dxdydz$ dove V è il dominio definito da

   $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del ROTORE del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (\frac{3}{2}y + z^2)\,\vec{i} + (x - z^2)\,\vec{j} + (z + \arctan(xe^y))\,\vec{k}$$

   attraverso la superficie S definita dalla porzione di superficie sferica $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ contenuta nel cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\gamma \in [0, +\infty[$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^\gamma + 1} 3^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\gamma \in [0, +\infty[$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \sin x$, se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2x$, se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\dfrac{4 - y^2}{y}, \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia e le eventuali simmetrie delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = t\dfrac{4 - y^2}{y}, \quad y(0) = -\sqrt{3}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:
