Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 14 luglio 2014
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il volume del solido V definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \le 4\,, 0 \le z \le x + 2\}\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'area della superficie S data dal paraboloide $z = 2-(x^2+y^2)$ contenuta nel semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge \frac{7}{4}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\ge1}$ definita da

$$f_n(x) = \arctan(n^{x-7})\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite f. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si discuta la convergenza puntuale e la convergenza totale. (*può essere utile ricordare che* $|\arctan t| \leq |t|, \ \forall t \in \mathbb{R}$)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 3|x|$ se $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$ altrimenti e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(\frac{\pi}{4})$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 8\left(\cosh\left(\frac{y}{2}\right) - 1\right) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\dfrac{(e^{y/2} - 1)^2}{e^{y/2}} \\ y(0) = 2\log 2. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare il volume del solido V definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \le 4 \,, 0 \le z \le x + 2\} \,.$$

....

Risposta [4 punti]:

2. Calcolare l'area della superficie S data dal paraboloide $z = 2-(x^2+y^2)$ contenuta nel semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge \frac{7}{4}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\ge1}$ definita da

$$f_n(x) = \arctan(n^{x-7}) \,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite f. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

4. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2 + 7n} \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si discuta la convergenza puntuale e la convergenza totale. (*può essere utile ricordare che* $|\arctan t| \le |t| \,, \ \forall t \in \mathbb{R}$)

....

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 3|x|$ se $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$ altrimenti e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2.

....

Risposta [4 punti]:

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(\frac{\pi}{4})$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 8\left(\cosh\left(\frac{y}{2}\right) - 1\right) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\dfrac{(e^{y/2} - 1)^2}{e^{y/2}} \\ y(0) = 2\log 2. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:
