

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 16 DICEMBRE 2008

FILA 1

1) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz,$$

dove V è la regione situata nei semispazi $x \geq 0$ e $y \geq 0$, delimitata dal piano $z = 3$, dal cono circolare con vertice nell'origine la cui intersezione con il piano $z = 3$ è la circonferenza di centro $(0, 0, 3)$ e raggio 1.

2) Si considerino il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} + 2z \vec{k}$$

e la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 - y^2, -1 \leq z < 0\}$. Si calcoli il flusso del rotore di \vec{F} attraverso la superficie S prima direttamente e poi mediante il teorema di Stokes. Perché i risultati sono diversi?

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita in tutto \mathbb{R} :

$$f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^\alpha};$$

al variare di α , si studi (eventualmente anche in sottointervalli) la convergenza puntuale in \mathbb{R} e uniforme in $[0, +\infty[$.

4) Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni in $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sqrt{\cos x} \cos^n x}{(2n+1)^\beta};$$

si calcoli, se possibile, la somma nel caso $\beta = 1$. (consiglio: può essere utile porre $t = \sqrt{\cos x}$).

5) Calcolare la soluzione \tilde{y} del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^4 - 2t^2 y + 2t + 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(consiglio: porre $z(t) = y(t) - t^2$)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \sin y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

- Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale).
- Studiare eventuali simmetrie della soluzione (pari, dispari....).
- Tracciare un grafico delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.