Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C — 16 gennaio 2012

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◊ AUTLM ◊ MECLM/MECLT ◊ AUTLS/MATLS/MECLS ◊ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il volume del solido $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \geq 0\,, x^2+y^2 \leq \frac{z^2}{2}\,, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

   ...

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (z - \arctan y)\frac{2}{\sqrt{1+x^4+1/(1+y^2)^2}}\, dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \frac{x^3}{3} - \arctan y\,, 0 \leq x \leq 1\,, -1 \leq y \leq 1\}$.

   ...

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\arctan\frac{x}{7}\right)^n}{49+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi. Calcolare $l_1 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^6 f_n(x)\,dx$ e $l_2 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^7 f_n(x)\,dx$.

   ...

   Risposta [5 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)7^{\alpha n}(x-1)^n$. Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si calcoli, se possibile, la funzione somma nel caso $\alpha = 1$.

   ...

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 6\sin 2x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, a_2.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t \log\left(1 + \frac{y^2-4}{y^2+9}\right)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Risolvere il problema di Cauchy $x^3 y'' + x^2 y' = 2 \quad y(1) = 3,\ y'(1) = 0$.

....

Risposta [3 punti]:

---

1. Calcolare il volume del solido $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{2}\,, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (z - \arctan y) \frac{2}{\sqrt{1+x^4+1/(1+y^2)^2}}\, dS$, dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{x^3}{3} - \arctan y\,, 0 \leq x \leq 1\,, -1 \leq y \leq 1\,\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{7}\right)^n}{49 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi. Calcolare $l_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^6 f_n(x)\, dx$ e $l_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^7 f_n(x)\, dx$.

   ....

   Risposta [5 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) 7^{\alpha n} (x-1)^n$. Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si calcoli, se possibile, la funzione somma nel caso $\alpha = 1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 6 \sin 2x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

   e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, a_2.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t \log\left(1 + \frac{y^2-4}{y^2+9}\right)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Risolvere il problema di Cauchy $x^3y'' + x^2y' = 2 \quad y(1) = 3,\ y'(1) = 0$.

. . . .

Risposta [3 punti]:
