Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◊ AUTL ◊ MATL ◊ MECL ◊ AUTLS ◊ MATLS ◊ MECLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 12(x+y+z)\,dxdydz$ dove V è il dominio compreso fra il cono $z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}$, il paraboloide $z=\frac{x^2}{4}+y^2$ ed il piano $z=1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S 3(x^2+y^2)\,dS$ dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2y-\frac{y^3}{3}\,, x^2+y^2\le\sqrt{3}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Sia $\beta\in\mathbb{R}$; si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$ così definita:

$$f_n(x)=n^{\beta-1}\left[\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right],\quad x\in[0,+\infty[\,.$$

Si determini il limite puntuale f al variare di $\beta\in\mathbb{R}$. Nei casi in cui $f(x)\equiv 0$ si studi per quali valori di β può essere affermata la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $[0,+\infty[$ e/o in suoi sottoinsiemi (si osservi che $t-\sin t\ge 0$, $\forall t\in[0,+\infty[$).

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-7)^{2n+1}}{(n!)^\alpha}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Nel caso $\alpha = 1$ si calcoli, se possibile, la funzione somma

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \le 0$, $f(x) = 3x$ se $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \frac{3}{2}\pi$ se $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$ e prolungata per periodicità.

Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Si calcoli a_0; si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quali valori converge in $x = 3\pi$, $x = \frac{5}{2}\pi$, $x = 14\pi$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = -\dfrac{t}{2(2+t^2)}\, y + \dfrac{t}{y^3}$, $y(0) = \sqrt[4]{2}$. (Suggerimento: porre $z(t) = (y(t))^4 \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = y(y-1)\log(t+2)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a sinistra e/o a destra o no, motivando la risposta.

Si studi la limitatezza delle soluzioni ed il loro comportamento asintotico all'estremo destro degli intervalli massimali. Per quali valori di y_0 le soluzioni ammettono dei punti di flesso?

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 12(x+y+z)\,dxdydz$ dove V è il dominio compreso fra il cono $z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}$, il paraboloide $z=\frac{x^2}{4}+y^2$ ed il piano $z=1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S 3(x^2+y^2)\,dS$ dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2y-\frac{y^3}{3}\,, x^2+y^2\leq\sqrt{3}\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Sia $\beta\in\mathbb{R}$; si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$ così definita:

$$f_n(x)=n^{\beta-1}\left[\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right]\,,\quad x\in[0,+\infty[\,.$$

   Si determini il limite puntuale f al variare di $\beta\in\mathbb{R}$. Nei casi in cui $f(x)\equiv 0$ si studi per quali valori di β può essere affermata la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $[0,+\infty[$ e/o in suoi sottoinsiemi (si osservi che $t-\sin t\geq 0$, $\forall t\in[0,+\infty[$).

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-7)^{2n+1}}{(n!)^\alpha}\,.$$

   Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Nel caso $\alpha=1$ si calcoli, se possibile, la funzione somma

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x)=0$ se $-\pi<x\leq 0$, $f(x)=3x$ se $0<x\leq\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\frac{3}{2}\pi$ se $\frac{\pi}{2}<x\leq\pi$ e prolungata per periodicità.

Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Si calcoli a_0; si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quali valori converge in $x = 3\pi$, $x = \frac{5}{2}\pi$, $x = 14\pi$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = -\dfrac{t}{2(2+t^2)}\, y + \dfrac{t}{y^3}$, $y(0) = \sqrt[4]{2}$. (Suggerimento: porre $z(t) = (y(t))^4 \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = y(y-1)\log(t+2)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

   Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a sinistra e/o a destra o no, motivando la risposta.

   Si studi la limitatezza delle soluzioni ed il loro comportamento asintotico all'estremo destro degli intervalli massimali. Per quali valori di y_0 le soluzioni ammettono dei punti di flesso?

. . . .

Risposta [4 punti]:
