COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 17 DICEMBRE 2007

COMPITO 1

1) Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_V x^2 z\, dxdydz\,,$$

dove V è la regione di spazio delimitata dal cilindro parabolico di equazione $y = 3 - x^2$ e dai piani $y = 0$, $z = 0$ e $z = 1$.

2) Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_S 3y^3\, dS\,,$$

dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + \frac{1}{2}y^2,\ 0 \le x \le 5;\ 0 \le y \le \sqrt{2}\}$.

3) Si consideri la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in $[0, 2\pi]$ da $f_n(x) = \cos x \sin^{2n} x$. Si studi la convergenza puntuale e la convergenza uniforme in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dire se $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\, dx = 0$.

4) Si consideri la serie trigonometrica

$$(*) \qquad \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

e se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$.
Si consideri poi la funzione f periodica di periodo 2π, definita da

$$f(x) = 2|x| \quad x \in [-\pi, \pi)$$

e si mostri che la serie $(*)$ è la sua serie di Fourier. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di tale serie di Fourier in $\mathbb{R}$, sulla base delle caratteristiche di f.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0\,, \\ y(1) = 2\,, \quad y'(1) = 5. \end{cases}$$

(consiglio: porre $x = e^t$ e poi $z(t) = y(e^t)$)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2 + 9} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Studiare esistenza (locale e globale) ed unicità di soluzioni.
(b) Studiare la limitatezza, la monotonia, la concavità e gli asintoti delle soluzioni.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.