COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA — 18 gennaio 2011 — FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◇ AUTLM ◇ MECLT ◇ MECL ◇ AUTLS ◇ MATLS ◇ MECLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4y - 1\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{1+y^2}\,\vec{i} + \frac{1}{1+x^2}\,\vec{j} + \frac{1}{1+z^2}\,\vec{k}$ attraverso la porzione di superficie cilindrica $\vec{r}(u, v) = \sqrt{3}\cos u\,\vec{i} + \sqrt{3}\sin u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $-7 \leq v \leq 14$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = 3x^{2n} \arctan x^{2n+1}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(7x + \frac{\arcsin x}{n}\right)^n$, $\quad x \in [0, 1]$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e discutere la convergenza totale.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \pi|\sin x| + 1$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$. Si calcolino a_0, a_1, a_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' - y' = 3e^{2t} \cos e^t$, $y(\log \frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\log \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\pi$. (Suggerimento: porre $z(t) = y'(t) \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan \frac{y^2-49}{y^2+49} , \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi poi monotonia, asintoti, convessità della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Calcolare l'area della regione del piano individuata dall'arcata di cicloide di equazioni parametriche $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e il segmento dell'asse x con $0 \leq x \leq 2\pi$ (suggerimento: usare il teorema di Green e tenere presente il verso di percorrenza antiorario).

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

1. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4y - 1\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{1+y^2}\,\vec{i} + \frac{1}{1+x^2}\,\vec{j} + \frac{1}{1+z^2}\,\vec{k}$ attraverso la porzione di superficie cilindrica $\vec{r}(u, v) = \sqrt{3}\cos u\,\vec{i} + \sqrt{3}\sin u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $-7 \leq v \leq 14$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = 3x^{2n} \arctan x^{2n+1}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(7x + \frac{\arcsin x}{n}\right)^n$, $\quad x \in [0, 1]$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e discutere la convergenza totale.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \pi|\sin x| + 1$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$. Si calcolino a_0, a_1, a_2.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' - y' = 3e^{2t} \cos e^t$, $y(\log \frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\log \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\pi$. (Suggerimento: porre $z(t) = y'(t) \ldots$).

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan \frac{y^2-49}{y^2+49}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi poi monotonia, asintoti, convessità della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Calcolare l'area della regione del piano individuata dall'arcata di cicloide di equazioni parametriche $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ e il segmento dell'asse x con $0 \le x \le 2\pi$ (suggerimento: usare il teorema di Green e tenere presente il verso di percorrenza antiorario).

. . . .

Risposta [3 punti]:
