Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 19 aprile 2011
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◊ AUTLM ◊ MECLM ◊ AUTLS ◊ MATLS ◊ MECLS ◊ CIVLS ◊ AMBLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove V è il dominio delimitato dalla superficie conica $z = 2 - \sqrt{(x^2+y^2)}$ e dai piani $z = 0$ e $z = 1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S 3[\sqrt{x^2+y^2} - 1]\,dS$, dove S è la superficie laterale del tronco di cono dell'esercizio precedente.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-n)^2} & \text{se } |x-n| \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

   Si determini il limite puntuale f. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$? E nei suoi sottoinsiemi limitati? Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} \frac{x^{2n}}{49^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si considerino $\beta \in \mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \beta x$ e prolungata per periodicità. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ affinché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

   sia la sua serie di Fourier.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' + \dfrac{y' \sin 2t}{1 + \cos^2 t} = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 28$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\log^2 y + \frac{1}{2}\right), \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

   Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia delle soluzioni.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a sinistra e/o destra o no, motivando la risposta. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ la concavità delle soluzioni.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove V è il dominio delimitato dalla superficie conica $z = 2 - \sqrt{(x^2+y^2)}$ e dai piani $z = 0$ e $z = 1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S 3[\sqrt{x^2+y^2} - 1]\,dS$, dove S è la superficie laterale del tronco di cono dell'esercizio precedente.

   ....

   Risposta [4 punti]:

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-n)^2} & \text{se } |x-n| \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

   Si determini il limite puntuale f. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$? E nei suoi sottoinsiemi limitati? Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n^{\alpha-1}}\frac{x^{2n}}{49^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo.

   ....

   Risposta [4 punti]:

5. Si considerino $\beta \in \mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \beta x$ e prolungata per periodicità. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ affinché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

   sia la sua serie di Fourier.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' + \dfrac{y' \sin 2t}{1+\cos^2 t} = 0\,,\ y(0) = 7\,,\ y'(0) = 28\,.$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\log^2 y + \frac{1}{2}\right)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a sinistra e/o destra o no, motivando la risposta. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ la concavità delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:
