COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 20 DICEMBRE 2004

1) Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{3y}{x^2+y^2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso la superficie S definita da $\overrightarrow{r}(u,v) = u\cos v\,\overrightarrow{i} + u\sin v\,\overrightarrow{j} + u^2\overrightarrow{k}$, $0 \le u \le 1/2$, $0 \le v \le 2\pi$, orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.

2) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T (x+y+2z)\,dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1\,; 2x \le y \le x+1\,; 0 \le z \le x+y\}$.

3) Sia data la seguente successione definita in tutto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$f_n(x) = \frac{(\tan x)^n}{\cos^2 x}\,;$$

si studi la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n(x)\}_{n>0}$. Si discuta l'applicazione del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale negli intervalli $[0, \frac{\pi}{6}]$ e $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4) Sia $f(x) = x^2$, $\quad -\pi \le x < \pi$, prolungata per periodicità al di fuori di $[-\pi, \pi[$. Scrivere la serie di Fourier di f. Dedurre da essa il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

5) Determinare la soluzione $(x(t), y(t))$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 3x - 2y, \\ x(0) = 4, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

6) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan y \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

1. Dimostrare che esiste un'unica soluzione u definita su tutto $\mathbb{R}$.
2. Dimostrare che, se u è soluzione, è strettamente monotona, se $\alpha \neq 0$.
3. Dimostrare che, se u è soluzione, è convessa, se $\alpha > 0$, concava se $\alpha < 0$.
4. Nel caso $\alpha \ge 0$ calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} u(t)$.

Tempo a disposizione: 2 ore.