COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 20 SETTEMBRE 2005

1) Calcolare l'area della superficie S definita da $\overrightarrow{r}(u,v) = \sqrt{2}u\,\overrightarrow{i} - v\,\overrightarrow{j} + [\frac{2}{3}u^{3/2} - v]\,\overrightarrow{k}$, $0 \leq u \leq 2 - v$, $0 \leq v \leq 2$.

2) Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_T (xyz^2)\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1\,; x^2 \leq y \leq 1\,; -1 \leq z \leq 1\}$.

3) Si consideri la successione $\{f_n\}_{n>0}$ con

$$f_n(x) = \frac{\log x}{1 + (\log x)^{2n}}$$

in $]0, +\infty[$ e se ne studi la convergenza puntuale. Si studi anche la convergenza uniforme in $]e, +\infty[$.

4) Sia $k \in \mathbb{Z}$. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{kn}}{n2^n};$$

si determini l'insieme di convergenza I_k nei casi, rispettivamente, $k \in \mathbb{Z}^+$, $k = 0$ e $k \in \mathbb{Z}^-$. In ciascuno dei casi precedenti si calcoli la somma della serie in I_k.

5) Calcolare la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{t}y' = -4t^2 \sin t^2, \\ y(\sqrt{\pi}) = 3, \quad y'(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}. \end{cases}$$

6) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t(\arctan y^2 - 1) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

1. Studiare esistenza ed unicità locali e globali $\mathbb{R}$.
2. La soluzione u è pari o dispari?
3. Determinare per quali valori di α esistono soluzioni u costanti.
4. Studiare il segno di u'.
5. Calcolare, al variare di α, $\lim_{t\to-\infty} u(t)$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t)$.

Tempo a disposizione: 2 ore.