Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTL ♢ MATL ♢ MECL ♢ AUTLS ♢ MATLS ♢ MECLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 4z\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S x^3\,dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{2} + y\,, \quad 0 \le x \le \sqrt{3} \quad 0 \le y \le 21\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

3. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\{f_n\}$ la successione di funzioni così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 1 + \frac{2}{n^3} \text{ oppure } x \ge 1 + \frac{4}{n^3} \\ n^4 x - n^4 - 2n & \text{se } 1 + \frac{2}{n^3} < x \le 1 + \frac{3}{n^3} \\ -n^4 x + n^4 + 4n & \text{se } 1 + \frac{3}{n^3} \le x < 1 + \frac{4}{n^3} \end{cases}$$

   Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$. Converge uniformemente in $\mathbb{R}$? Converge uniformemente in $]-\infty, 1]$? La tesi del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale è verificata in $[1, 5]$?

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{\alpha n^2} n(x-1)^n \,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Nel caso $\alpha = 0$ si determini la funzione somma.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{x}{4} & \text{se } |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare a_0 e b_2. Si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quale valore converge in $x = \frac{5}{2}\pi$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = (y+2)\log(y+2)\,,\ y(0) = 2\,.$

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(y+2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e la concavità delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 4z\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S x^3\,dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{2} + y\,, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3} \quad 0 \leq y \leq 21\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

3. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\{f_n\}$ la successione di funzioni così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 + \frac{2}{n^3} \text{ oppure } x \geq 1 + \frac{4}{n^3} \\ n^4 x - n^4 - 2n & \text{se } 1 + \frac{2}{n^3} < x \leq 1 + \frac{3}{n^3} \\ -n^4 x + n^4 + 4n & \text{se } 1 + \frac{3}{n^3} \leq x < 1 + \frac{4}{n^3} \end{cases}$$

   Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$. Converge uniformemente in $\mathbb{R}$? Converge uniformemente in $]-\infty, 1]$? La tesi del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale è verificata in $[1,5]$?

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{\alpha n^2} n(x-1)^n\,.$$

   Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Nel caso $\alpha = 0$ si determini la funzione somma.

   ....

   Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{x}{4} & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare a_0 e b_2. Si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quale valore converge in $x = \frac{5}{2}\pi$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = (y + 2)\log(y + 2)$, $y(0) = 2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(y + 2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e la concavità delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:
