Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 25 marzo 2013
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T yz\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio compresa tra il piano $z = \sqrt{7}$ e la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e contenuta nel primo ottante $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica S definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\,,\ z \geq 0\}.$$

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 2}$ così definita:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{n^2}, \quad x \geq -7.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} (\sqrt{x}-1)^n\,, \quad x \geq 0\,,$$

determinare l'insieme A di convergenza puntuale. Calcolare la somma della serie in A (suggerimento: porre $\frac{\sqrt{x}-1}{2} = t \ldots$).

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{4}{\pi}x & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2\cos x & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; se ne discuta la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione $\tilde{u}$ del problema di Cauchy $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$, $y(0) = \sqrt{2}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente; in particolare determinare l'intervallo massimale di esistenza e gli eventuali asintoti.

....

Risposta [4 punti]:

Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C | 25 marzo 2013

FOGLIO B

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T yz\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio compresa tra il piano $z = \sqrt{7}$ e la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e contenuta nel primo ottante $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

2. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica S definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\,,\ z \geq 0\}.$$

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 2}$ così definita:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{n^2}\,, \quad x \geq -7.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

4. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sqrt{x} - 1)^n\,, \quad x \geq 0\,,$$

   determinare l'insieme A di convergenza puntuale. Calcolare la somma della serie in A (suggerimento: porre $\frac{\sqrt{x}-1}{2} = t \ldots$).

   ....

   Risposta [4 punti]:

   ---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{4}{\pi}x & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2\cos x & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

   e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; se ne discuta la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione $\tilde{u}$ del problema di Cauchy $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$, $y(0) = \sqrt{2}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente; in particolare determinare l'intervallo massimale di esistenza e gli eventuali asintoti.

. . . .

Risposta [4 punti]:
