COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 27 MARZO 2007

1) Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_T e^{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}}\, dxdydz\,,$$

dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1\}$.

2) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x, y, z) = 2x - y\,\overrightarrow{i} + -yz^2\,\overrightarrow{j} + z^2\,\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, z \geq 0\}$.

3) Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in $[0, +\infty)$ da $f_n(x) = \frac{x}{x^\alpha+n}$. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme.

4) Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{(2n+1)x^{2n}}.$$

Si calcoli la sua funzione somma.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = x, \\ y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza locale e globale.
(b) Tracciare un grafico qualitativo della soluzione u con $|y_0| < 1$.
(c) Che cosa succede nel caso $|y_0| > 1$? E nel caso $|y_0| = 1$.
(d) Verificare che, se $u : I \to \mathbb{R}$ è soluzione, anche $v_1 : I \to \mathbb{R}$ con $v_1(t) \equiv -u(-t)$ e $v_2 : I \setminus \{t \in I : u(t) = 0\} \to \mathbb{R}$ con $v_2(t) \equiv \frac{1}{u(t)}$.
(e) Determinare esplicitamente la soluzione nel caso $y_0 = 0$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.