Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Studi: ◇ AUTL ◇ MATL ◇ MECL ◇ AUTLS ◇ MATLS ◇ MECLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il volume del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{49} + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{49} - y^2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la porzione di superficie conica $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}\,, z > 0\}$. Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove

$$\vec{F}(x,y,z) = \log(1+x^2+y^2)[y\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}].$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Sia

$$\chi_{[k-1,k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [k-1,k) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}$; sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni così definita:

$$f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{k+2}}{k+1} \chi_{[k-1,k)}(x)\,.$$

Si determini il limite puntuale f e gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il raggio di convergenza r della seguente serie di potenze: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{n+7\log n}+2}{e^{n+2}+n^2}\sin\frac{7}{n^7}\right)^n (x+1)^n$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; si calcoli $a_2 + b_2$, essendo $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} ty'' = y' \log\left(\frac{y'}{t}\right), \\ y(1) = 7, \quad y'(1) = e^2. \end{cases}$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^y \arctan y}{y^2-4}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la monotonia.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si dica se, al variare di α, l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si studi la limitatezza delle soluzioni ed il loro comportamento asintotico all'estremo destro degli intervalli massimali.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{49} + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{49} - y^2\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

2. Si consideri la porzione di superficie conica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\,, z > 0\}$. Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove

$$\vec{F}(x, y, z) = \log(1 + x^2 + y^2)[y\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}].$$

   ....

   Risposta [4 punti]:

3. Sia

$$\chi_{[k-1,k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [k-1, k) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   $k \in \mathbb{N}$; sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni così definita:

$$f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{k+2}}{k+1} \chi_{[k-1,k)}(x)\,.$$

   Si determini il limite puntuale f e gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Calcolare il raggio di convergenza r della seguente serie di potenze: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{n+7\log n} + 2}{e^{n+2} + n^2} \sin \frac{7}{n^7} \right)^n (x+1)^n\,.$

   ....

   Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; si calcoli $a_2 + b_2$, essendo $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} ty'' = y' \log\left(\frac{y'}{t}\right), \\ y(1) = 7, \quad y'(1) = e^2. \end{cases}$$

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^y \arctan y}{y^2-4}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la monotonia.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si dica se, al variare di α, l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si studi la limitatezza delle soluzioni ed il loro comportamento asintotico all'estremo destro degli intervalli massimali.

....

Risposta [4 punti]:
