COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - ANALISI MATEMATICA C 28 giugno 2011
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◇ AUTLM ◇ MECLM/MECLT ◇ AUTLS/MATLS/MECLS ◇ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V z^2\, dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad 0 \le z \le \frac{x^2}{9} + 49y^2\,, \frac{x^2}{9} + 49y^2 \le 1\}$

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S \frac{1}{4}\sqrt{x+y+1}\, dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})\,, x \ge 0\,, y \ge 0\,, x+y \le 2\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0,+\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{x^n - 2}{x^n + 2}$$

   Si determini il limite puntuale f. Si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0,+\infty[$ e nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{7^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n^\alpha + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Calcolare la somma della serie nel caso $\alpha = 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 7(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, e la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = 49(t + y)^2$, $y(0) = \frac{1}{7}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t^3(e^{\sin y} - 1)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari). Si studi poi monotonia, asintoti della soluzione al variare di $y_0 \in]0, 2\pi[$.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V z^2\, dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad 0 \le z \le \frac{x^2}{9} + 49y^2\,, \frac{x^2}{9} + 49y^2 \le 1\}$

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S \frac{1}{4}\sqrt{x+y+1}\, dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})\,, x \ge 0\,, y \ge 0\,, x+y \le 2\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0, +\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{x^n - 2}{x^n + 2}$$

   Si determini il limite puntuale f. Si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0, +\infty[$ e nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{7^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n^\alpha + 1}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Calcolare la somma della serie nel caso $\alpha = 1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 7(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, e la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' = 49(t + y)^2$, $y(0) = \frac{1}{7}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t^3(e^{\sin y} - 1)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari). Si studi poi monotonia, asintoti della soluzione al variare di $y_0 \in]0, 2\pi[$.

. . . .

Risposta [4 punti]:
