COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 28 MARZO 2008

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = yz\overrightarrow{i} + (xz+y^2)\overrightarrow{j} + (xy+z^2)\overrightarrow{k}$ attraverso la semisfera $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

2) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S z^2\, dS$$

dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2+y^2}, z \geq 0\}$ è una porzione di cono.

3)Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $[0,+\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^\alpha x^2}\ ;$$

si studi, al variare di α la convergenza puntuale e la convergenza uniforme in $[0,+\infty[$.

4) Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\frac{x}{n}}{n^\beta+1}\ ;$$

a. Si mostri che converge puntualmente in $\mathbb{R}$ $\forall\beta > 0$.
b. Si mostri che converge totalmemente in $\mathbb{R}$ $\forall\beta > 1$.
c. Si mostri che converge uniformemente sui limitati di $\mathbb{R}$ $\forall\beta > 0$.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{y}\dfrac{1}{\cos^2 t}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(consiglio: porre $y(t) = \sqrt{z(t)}$....)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t(1-\cos y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a. Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale).
b. Si consideri $0 < y_0 < 2\pi$. Studiare monotonia, concavità, limitatezza e asintoti della soluzione e se ne tracci il grafico.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.