COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - ANALISI MATEMATICA C — 2 aprile 2012

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^3 + 2x)\,\vec{i} + yx^2\,\vec{j} + \frac{1+y^2}{1+x^2}\,\vec{k}$ attraverso la superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, delimitato dai piani $z = 0$ e $z = 7$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del ROTORE del campo $\vec{G} = (zy + x)\,\vec{i} + zy\,\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\vec{k}$ attraverso la superficie LATERALE del cilindro dell'esercizio precedente.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{e^{n(x-6)}}{e^{n(x-6)} + 6} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^n (n+1)(n!)^{\alpha-1}} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si calcoli, se possibile, la funzione somma nel caso $\alpha = 2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ x + 7 & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n, $n \in \mathbb{N}$ e b_n, $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

   Sapendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi} = \frac{\pi}{6}$ e il valore (appena determinato) di $S(2\pi)$, calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{(y-2)^2}{t^2+1}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione problema di Cauchy $y' = \frac{(y-2)^2}{t^2+1}$, $y(0) = 3$, verificare se l'intervallo massimale è illimitato a sinistra. Può essere illimitato a destra? Se il dato di Cauchy ($y_0 > 3$) aumenta, come varia l'intervallo massimale?

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^3 + 2x)\,\vec{i} + yx^2\,\vec{j} + \frac{1+y^2}{1+x^2}\,\vec{k}$ attraverso la superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, delimitato dai piani $z = 0$ e $z = 7$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del ROTORE del campo $\vec{G} = (zy + x)\,\vec{i} + zy\,\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\vec{k}$ attraverso la superficie LATERALE del cilindro dell'esercizio precedente.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{e^{n(x-6)}}{e^{n(x-6)} + 6} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^n (n+1)(n!)^{\alpha-1}} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si calcoli, se possibile, la funzione somma nel caso $\alpha = 2$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ x + 7 & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n, $n \in \mathbb{N}$ e b_n, $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

   Sapendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi} = \frac{\pi}{6}$ e il valore (appena determinato) di $S(2\pi)$, calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{(y-2)^2}{t^2+1}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione problema di Cauchy $y' = \frac{(y-2)^2}{t^2+1}$, $y(0) = 3$, verificare se l'intervallo massimale è illimitato a sinistra. Può essere illimitato a destra? Se il dato di Cauchy ($y_0 > 3$) aumenta, come varia l'intervallo massimale?

   ....

   Risposta [4 punti]:
