COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 2 DICEMBRE 2008

FILA 1

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^4\overrightarrow{i} + 3y\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2) Si consideri la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\,, z \geq a\}$. Determinare $a \in [0,2]$ in modo che l'integrale di superficie

$$\int\!\!\int_S \frac{1}{4} z^2 \, dS$$

valga π.

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n^\alpha x^2}\,;$$

si studi, al variare di α la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ ed uniforme in $[0, +\infty[$.

4) Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(2n+1)!]^\beta x^{2n+2}}{(2n+2)}\,;$$

si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = -1$.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0\,, \\ y(1) = 3\,, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

(consiglio: porre $x = e^t$ e poi $z(t) = y(e^t)$)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1 + (y-2)^2)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a. Dimostrare l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale) al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.
b. Studiare monotonia, concavità, limitatezza e asintoti della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ e se ne tracci il grafico.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.