Cognome e nome ................................ Firma ................ Matricola ................

Corso di Studi: ◊ AUTL ◊ MATL ◊ MECL ◊ AUTLS ◊ MATLS ◊ MECLS

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 20(x^2+y^2)\,dxdydz$ dove $V$ è il dominio nel semispazio $y \geq 0$, delimitato della superficie conica $z = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$ e dal piano $z = 2$.

   ....................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = e^y\vec{i} + e^{-x}\vec{j} + e^z\vec{k}$ attraverso la superficie cilindrica $\vec{r}(u,v) = 7\cos u\,\vec{i} + 7\sin u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 14$.

   ....................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita: $f_n(x) = (x-2)e^{-n|x-2|}$. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ ad $f$ in $\mathbb{R}$. Si discuta anche la convergenza puntuale della successione $\{f'_n\}$ in $\mathbb{R}$, verificando se la funzione limite è la derivata di $f$.

   ....................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}\log^{\alpha-1} n}{e^{21n}}$. Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Dove può essere affermata la convergenza uniforme?

   ....................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2, definita in $(-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ -x & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x)$ la sua serie di Fourier. Calcolare $a_0$; si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quali valori converge in $x = 2m$, $x = 2m + \frac{1}{2}$, $x = 2m + 1$, ove $m \in \mathbb{Z}$.

....................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' = 7\left(\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}\right)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 14$. (Osservare che $\frac{d}{dt}y' = 7\frac{d}{dt}(\frac{y}{t}) = \ldots$ e quindi $y' = 7\frac{y}{t} + \ldots$)

....................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(1 - e^{-y^2})(y - 2)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi la monotonia delle soluzioni.

....................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si determinino al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui). Si calcoli $\lim_{t\to 0} \frac{u(t)-y_0}{t^2}$, dove $u$ è soluzione del problema di Cauchy.

....................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 20(x^2+y^2)\,dxdydz$ dove $V$ è il dominio nel semispazio $y \geq 0$, delimitato della superficie conica $z = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$ e dal piano $z = 2$.

   ........................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = e^y\vec{i} + e^{-x}\vec{j} + e^z\vec{k}$ attraverso la superficie cilindrica $\vec{r}(u,v) = 7\cos u\,\vec{i} + 7\sin u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 14$.

   ........................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita: $f_n(x) = (x-2)e^{-n|x-2|}$. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ ad $f$ in $\mathbb{R}$. Si discuta anche la convergenza puntuale della successione $\{f_n'\}$ in $\mathbb{R}$, verificando se la funzione limite è la derivata di $f$.

   ........................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}\log^{\alpha-1} n}{e^{21n}}$. Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Dove può essere affermata la convergenza uniforme?

   ........................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2, definita in $(-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ -x & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

   e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\pi nx) + b_n \sin(\pi nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare $a_0$; si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quali valori converge in $x = 2m$, $x = 2m + \frac{1}{2}$, $x = 2m + 1$, ove $m \in \mathbb{Z}$.

   ........................................................................................

   **Risposta [4 punti]:**

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' = 7\left(\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}\right)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 14$. (Osservare che $\frac{d}{dt}y' = 7\frac{d}{dt}(\frac{y}{t}) = \ldots$ e quindi $y' = 7\frac{y}{t} + \ldots$)

..........................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(1 - e^{-y^2})(y - 2)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi la monotonia delle soluzioni.

..........................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente. Si determinino al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui). Si calcoli $\lim_{t\to 0} \frac{u(t)-y_0}{t^2}$, dove $u$ è soluzione del problema di Cauchy.

..........................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---