Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 2 luglio 2012
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◊ AUTLM ◊ MECLM/MECLT ◊ AUTLS/MATLS/MECLS ◊ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T 15\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove T è la parte limitata di spazio compresa fra i paraboloidi $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - (x^2 + y^2)$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2}\, dS\,,$$

   dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; z = \cos x + y\,, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, 0 \le y \le 7\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = (7 - x)\frac{x^n}{7^n}\,, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} 7^n \sin \frac{1}{n^\alpha} (x-1)^n \quad x \in \mathbb{R}$.

Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gli intervalli di convergenza uniforme.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{4}{\pi}x + 2$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2\cos x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0 e $3b_2$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y} - 1)e^{-2y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studi poi la monotonia e si discuta la possibilità di asintoti orizzontali. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y} - 1)e^{-2y} \\ y(0) = -\frac{1}{2}\log 2\,, \end{cases}$$

verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra, confrontando le conclusioni con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:

Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 2 luglio 2012

FOGLIO B

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T 15\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$ dove T è la parte limitata di spazio compresa fra i paraboloidi $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - (x^2 + y^2)$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2}\, dS\,,$$

   dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ z = \cos x + y\,, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, 0 \le y \le 7\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = (7 - x)\frac{x^n}{7^n}\,, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} 7^n \sin\frac{1}{n^\alpha}\,(x-1)^n \quad x \in \mathbb{R}$.

   Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gli intervalli di convergenza uniforme.

   ....

   Risposta [5 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{4}{\pi}x + 2$ se $-\pi < x \le 0$, $f(x) = 2\cos x$ se $0 < x \le \pi$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0 e $3b_2$.

   ....

   Risposta [3 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y} - 1)e^{-2y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studi poi la monotonia e si discuta la possibilità di asintoti orizzontali. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y} - 1)e^{-2y} \\ y(0) = -\frac{1}{2}\log 2\,, \end{cases}$$

verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra, confrontando le conclusioni con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:
