# COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

## PROVA SCRITTA DEL 31 MARZO 2009

1) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V (x+y+z)\, dxdydz\,,$$

dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1\,, 2x \le y \le 2\,, 0 \le z \le x+y\}$.

2) Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S (x^2+y^2)\, dS$$

dove $S$ è data dalla rappresentazione parametrica $\overrightarrow{r}(u,v) = \sqrt{u}\cos v\,\overrightarrow{i} + \sqrt{u}\sin v\,\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\,\overrightarrow{k}\,, \quad 0 \le u \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \le v \le \pi$.

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $[0,+\infty[$:

$$f_n(x) = n^\alpha x \log(1 + \frac{x}{n})\,;$$

si studi, al variare di $\alpha$, la convergenza puntuale in $[0,+\infty[$ e, nel caso $\alpha = 0$, la convergenza uniforme in $[0,+\infty[$ (ed eventualmente in sottointervalli).

4) Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{[n!]^\beta}\,;$$

si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$ (consiglio: applicare il teorema di derivazione per serie).

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = (y'+t)^2 + 2y' + 2t\,, \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a. Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale) al variare di $y_0 \in [-1,1]$.
b. Studiare monotonia, concavità, limitatezza e asintoti delle soluzioni al variare di $y_0 \in ]-1,1[$.
c. Discutere il caso particolare $y_0 = -1$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.