COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 3 DICEMBRE 2007

COMPITO 1

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z^4\,\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie del cilindro circolare di equazione $x^2 + y^2 = 4$ delimitato dai piani $z = -1$ e $z = 1$.

2) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{G}(x,y,z) = x^2\,\overrightarrow{i} + y^2\,\overrightarrow{j} + z^2\,\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie LATERALE del cilindro circolare dato nell'esercizio precedente.

3)Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = 2e^{n^\alpha x} + e^{-nx}\,;$$

si studi, al variare di α la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e la convergenza uniforme per $\alpha = 0$.

4) Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{(n!)^\beta}\,;$$

si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y-t)^2 + 2(y-t) + 2\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

(consiglio: porre $z = \ldots$)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-4y+3} - 1 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale).
2. Studiare monotonia, concavità e flessi delle soluzioni.
3. Studiare limitatezza e asintoti della soluzione nel caso $y_0 = 2$ e se ne tracci il grafico.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.