Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◇ AUTLM ◇ MECLM ◇ MECL ◇ AUTLS ◇ MATLS ◇ MECLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V \frac{1}{8}(x+7y+z)\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2\,, 0 \le y \le \frac{1}{7}, 0 \le z \le x+7y\}$

   ....

   Risposta [4 punti]:

2. Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove

   $$\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$$

   dove S è la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$, interna al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \sqrt[3]{x+\frac{4}{n}}$. Si determini il limite puntuale f e gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ (si osservi che $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ se e solo se $a > b$). Il limite puntuale f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin\left(x\,(\frac{\alpha}{7})^n\right)$, $\quad x \in \mathbb{R}$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7|\tan x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1. Calcolare $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y''\,y + {y'}^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{3}{2}$. (Suggerimento: porre $y'(t) = w(y)$, $y'' = \ldots$ oppure notare che $y''\,y + {y'}^2 = \frac{d}{dt}(y\,y')\ \ldots$).

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \cos y\, e^{y^2} , \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia della soluzione e gli asintoti.

Si calcoli $\lim_{t\to 0} \frac{u(t)-y_0}{t^4}$, dove u è soluzione del problema di Cauchy.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V \frac{1}{8}(x+7y+z)\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2\,, 0 \le y \le \frac{1}{7}, 0 \le z \le x+7y\}$

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove

$$\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$$

   dove S è la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$, interna al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \sqrt[3]{x+\frac{4}{n}}$. Si determini il limite puntuale f e gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ (si osservi che $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ se e solo se $a > b$). Il limite puntuale f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin\left(x\left(\frac{\alpha}{7}\right)^n\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7|\tan x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

   e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1. Calcolare $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' y + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{3}{2}$. (Suggerimento: porre $y'(t) = w(y)$, $y'' = \ldots$ oppure notare che $y'' y + y'^2 = \frac{d}{dt}(y\, y')$ ...).

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \cos y \, e^{y^2} , \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esercizio precedente.

Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia della soluzione e gli asintoti.

Si calcoli $\lim_{t\to 0} \frac{u(t)-y_0}{t^4}$, dove u è soluzione del problema di Cauchy.

....

Risposta [4 punti]:
