Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C | 3 luglio 2013

FOGLIO A

Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio interna al cilindro $x^2+y^2=2$, esterna al cilindro $x^2+y^2=1$ e compresa tra i piani $z=-1$ e $z=1$.

   . . . .

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-zy)\,\vec{i} + zy\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$ attraverso la superficie superiore del solido T dell'esercizio precedente.

   . . . .

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{7}\right)^n \log\left(\frac{x}{7}\right)^n.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   . . . .

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia data la serie di funzioni così definita in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}.$$

Studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale (*può essere utile ricordare che vale* $|\sin y| \leq |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \leq 0, \quad f(x) = 2x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_n $n \in \mathbb{N}$, b_n $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; se ne discuta la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-3}(y-2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione $\tilde{y}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = e^{2y} \\ y(0) = -\log 7\,, y'(0) = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

(suggerimento: porre $y'(t) = w(y)\ldots$).

....

Risposta [4 punti]:

FOGLIO B

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio interna al cilindro $x^2+y^2=2$, esterna al cilindro $x^2+y^2=1$ e compresa tra i piani $z=-1$ e $z=1$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z)=(x-zy)\,\vec{i}+zy\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$ attraverso la superficie superiore del solido T dell'esercizio precedente.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}^+$:

$$f_n(x)=\left(\frac{x}{7}\right)^n \log\left(\frac{x}{7}\right)^n.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia data la serie di funzioni così definita in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}.$$

   Studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale (*può essere utile ricordare che vale* $|\sin y| \le |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x)=0$ se $-\pi<x\le 0$, $\quad f(x)=2x$ se $0<x\le\pi$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_n $n\in\mathbb{N}$, b_n $n\in\mathbb{Z}^+$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; se ne discuta la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-3}(y-2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione $\tilde{y}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = e^{2y} \\ y(0) = -\log 7\,, y'(0) = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

(suggerimento: porre $y'(t) = w(y)\ldots$).

....

Risposta [4 punti]:
