COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 4 SETTEMBRE 2009

1) Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2\,, 0 \leq z \leq x\,, |y| \leq x^2\}$.

2) Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\!\!\int_S (x^2 + y^2)\, dS$$

dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^3 - 3xy^2\,, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^\alpha}}\,;$$

si studi la convergenza puntuale ed uniforme al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge ad una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

4) Si consideri poi la funzione f periodica di periodo 2π, definita da

$$f(x) = 1 - 2x \quad x \in [-\pi, \pi)\,.$$

Si mostri che la serie

$$(*) \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n} \sin nx$$

è la sua serie di Fourier. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di $(*)$ come serie trigonometrica; si ritrovino le conclusioni ottenute dai teoremi sulle caratteristiche di f, specificando, in particolare, il valore a cui converge nei multipli interi di π.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + \dfrac{1}{1 + \tan^2(\frac{y}{t})}\,, \\ y(1) = \frac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

(consiglio: porre $\frac{y}{t} = z$)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{|y|}{t+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a. Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale).
b. Studiare monotonia, concavità e asintoti delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.