Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C — 4 settembre 2013

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ◊ AUTLM ◊ MECLM/MECLT ◊ AUTLS/MATLS/MECLS ◊ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0,\ z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E 3z\, e^{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia S la semisuperficie sferica (contenuta nel semispazio $z > 0$) di centro l'origine e raggio 1. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S 21z^2\, dS.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = n^{(\alpha-7)}\ e^{-(x-n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Al variare di $\beta \in [0,+\infty[$, determinare l'insieme della convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(x-1)}}{n^\beta}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere inoltre la convergenza totale della serie. Infine, calcolare la somma della serie per $\beta = 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 7(\pi - x)$ e prolungata per periodicità. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4} \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0,\ z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E 3z\, e^{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia S la semisuperficie sferica (contenuta nel semispazio $z > 0$) di centro l'origine e raggio 1. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S 21z^2\, dS.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = n^{(\alpha-7)}\ e^{-(x-n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Al variare di $\beta \in [0, +\infty[$, determinare l'insieme della convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(x-1)}}{n^\beta}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere inoltre la convergenza totale della serie. Infine, calcolare la somma della serie per $\beta = 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 7(\pi - x)$ e prolungata per periodicità. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4}, \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4} \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:
