COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 6 DICEMBRE 2004

1) Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x - 11y)\overrightarrow{i} + (y - 2xz)\overrightarrow{j} + (x^2 + \sin y - y^2)\overrightarrow{k}$, calcolare il flusso del rotore di $\overrightarrow{F}$ attraverso la superficie S definita da $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 3$, orientata in modo che il versore normale punti verso l'alto. *(suggerimento: considerare l'integrazione sul bordo della superficie....)*

2) Calcolare il volume ed il baricentro del solido $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1; z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. *(suggerimento: considerare il cambiamento di variabili in coordinate cilindriche)*

3) Sia data la seguente successione definita in tutto $[0, 1]$:

$$f_n(x) = 2x - \frac{x^n}{n}\,;$$

sia f il limite puntuale di $\{f_n(x)\}_{n>0}$ e sia g il limite puntuale di $\{f'_n(x)\}_{n>0}$. Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n(x)\}_{n>0}$ e di $\{f'_n(x)\}_{n>0}$ in $[0, 1]$. Controllare se, in entrambi i casi, è verificata la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale e commentare in modo opportuno.

4) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di potenze reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n!)^{\alpha} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}.$$

Nel caso $\alpha = 0$ si calcoli la sua funzione somma in un opportuno intorno di $x = 0$.

5) Calcolare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} &y'' = 2(1 + y')^2, \\ &y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{aligned}$$

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-y^2} + t^4 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Dimostrare che esiste un'unica soluzione u definita su tutto $\mathbb{R}$.
2. u è dispari?
3. Calcolare $\lim_{t \to +\infty} u(t)$.

Tempo a disposizione: 2 ore.