Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C — 6 febbraio 2013

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^3} + \cos x)\vec{i} + (y^4 + \sin(z^2))\vec{j} + 3\left(z - \frac{z^2}{2}\right)\vec{k}\,,$$

attraverso la superficie chiusa $S = S_1 \cup S_2$, dove: $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\,,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } z = 0\,\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{z}{48}\, dS$, dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{2xy}\,, \quad 1 \le x \le 7\,, \quad 1 \le y \le 7\,\}\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\arctan(nx)}{n}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Data la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log\left(1+\frac{7x}{n}\right)}{(7x+n)^2}, \quad x \geq 0\,,$$
discuterne la convergenza puntuale e totale.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0 e a_1; mostrare che $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ e che $a_n = 0\ \forall n \geq 2$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} ty'' + 3y' = \frac{2}{t^2} \\ y(1) = -\frac{3}{2}\,, y'(1) = 5\,. \end{cases}$$

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y-2)e^y\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$
Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Sia Γ il bordo orientato (in senso antiorario) della semicorona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e contenuta nel semispazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0\}$. Calcolare
$$I = \int_\Gamma \left(\frac{2}{7}y^2 - e^{\sin x}\right) dx + \left(\frac{1}{7}xy + \sqrt{y^7+1}\right) dy$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^3} + \cos x)\vec{\imath} + (y^4 + \sin(z^2))\vec{\jmath} + 3\left(z - \frac{z^2}{2}\right)\vec{k}\,,$$

attraverso la superficie chiusa $S = S_1 \cup S_2$, dove: $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\,,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } z = 0\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{z}{48}\, dS$, dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{2xy}\,, \quad 1 \le x \le 7\,, \quad 1 \le y \le 7\}\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\arctan(nx)}{n}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log\left(1+\frac{7x}{n}\right)}{(7x+n)^2}, \quad x \ge 0\,,$$

discuterne la convergenza puntuale e totale.

....

Risposta [5 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2}$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0 e a_1; mostrare che $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ e che $a_n = 0\ \forall n \ge 2$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} ty'' + 3y' = \frac{2}{t^2} \\ y(1) = -\frac{3}{2}\,, y'(1) = 5\,. \end{cases}$$

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)e^y\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Sia Γ il bordo orientato (in senso antiorario) della semicorona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e contenuta nel semispazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$. Calcolare

$$I = \int_\Gamma (\frac{2}{7}y^2 - e^{\sin x})\,dx + (\frac{1}{7}xy + \sqrt{y^7+1})\,dy$$

. . . .

Risposta [4 punti]:
