COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 7 LUGLIO 2009

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2+z^2)\overrightarrow{i} + (y^2+z^2)\overrightarrow{j} + (3z^2+x^2+y^2)\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie chiusa data dal cono di equazione $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ e dal piano $z = 0$.

2) Calcolare il flusso del rotore campo vettoriale $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (e^x - y + ze^y)\overrightarrow{i} + (e^y + x - ze^x)\overrightarrow{j} + (8z^2 + ze^z)\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie laterale del cono dato nell'esercizio precedente.

3) Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $[0,+\infty[$:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}\,;$$

si studi la convergenza puntuale in $[0,+\infty[$ ed uniforme in $[0,1]$; è possibile negare a priori la convergenza uniforme in $[0,+\infty[$?

4) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) 2^{\alpha n} (x-1)^n\,;$$

si calcoli, se possibile, la somma nel caso $\alpha = 1$.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{t^2+y^2}{2ty}\,, \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

(consiglio: porre $y^2(t) = z(t)$)

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan y \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

1. Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale).
2. Studiare monotonia, concavità e asintoti delle soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.